Ο συνεχής ανατοκισμός και ο αριθμός e: ένα παρεξηγημένο θέμα

Γεώργιος Ν. Κόντος

Επιστημονικός Συνεργάτης Πανεπιστημίου Πειραιώς

Ο αριθμός e είναι το όριο της παράστασης $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ όταν το n τείνει στο άπειρο. Οι αριθμοί e και π[1] θεωρούνται από τους πιο γοητευτικούς αριθμούς στα μαθηματικά, με σπουδαίες εφαρμογές τόσο στις άλλες επιστήμες όσο και στα οικονομικά.

Στη συνέχεια, γίνεται μια σημαντική εφαρμογή του e στις τράπεζες, που έχει να κάνει με το ενδιαφέρον θέμα του συνεχή ανατοκισμού.

Ας υποθέσουμε ότι καταθέτουμε σε μια τράπεζα ευρώ Κ με επιτόκιο i.

Στο τέλος του χρόνου το ποσό που καταθέσαμε θα γίνει μαζί με τους τόκους:

Κ + Κ × Ι = Κ (1 + i).

Αν ο εκτοκισμός από την τράπεζα γίνει δύο φορές το χρόνο, δηλαδή κάθε εξάμηνο, το ποσό της κατάθεσής μας θα γίνει:

$$K + K \times i \times \frac{1}{2} + \left(K + K \times i\frac{1}{2}\right) \times i \times \frac{1}{2} =$$

$$= \left(K + K \times i \times \frac{1}{2}\right)\left(1 + i \times \frac{1}{2}\right) =$$

$$= K\left(1 + i \times \frac{1}{2}\right)\left(1 + i \times \frac{1}{2}\right) = K\left(1+\frac{i}{2}\right)^2.$$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι αν ο εκτοκισμός γίνεται τρεις φορές το χρόνο, το ύψος του κεφαλαίου, στο τέλος του χρόνου, θα γίνει Κ $\left(1+\frac{i}{3}\right)^3$.

Γενικεύοντας τον κανόνα, αν ο εκτοκισμός γίνεται x φορές το χρόνο, το κεφάλαιο στο τέλος του χρόνου θα γίνει Κ $\left(1+\frac{i}{x}\right)^x$.

Θα εξετάσουμε αν, σε περίπτωση αέναης διαδικασίας εκτοκισμού, το ανωτέρω κλάσμα έχει όριο. Έτσι, έχουμε:

$$\lim_{x\to\infty} K\left(1+\frac{i}{x}\right)^x = K \times \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{i}{x}\right)^{\frac{x}{i}}\right]^i = K \times \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x}{i}}\right)^{\frac{x}{i}}\right]^i =$$

$$= K \times \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^i \quad \text{όπου } \frac{x}{i} = n$$

[1] Ο π=3,14..., είναι το πηλίκο της διαίρεσης της περιμέτρου ενός οποιουδήποτε κύκλου διά της διαμέτρου του.

Όπως βλέπουμε από τον πίνακα δοκιμών σε σχέση με την τιμή του n, η παράσταση $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ έχει όριο τον αριθμό 2,71828..., που είναι γνωστός ως e και αποτελεί τη βάση των νεπερείων λογαρίθμων. Έτσι, η παράσταση γίνεται Κ × e^{i}, όταν ο συνεχής ανατοκισμός είναι για ένα χρόνο και Κ × e^{i*t}, όταν ο συνεχής ανατοκισμός γίνεται για t έτη.

Όριο της παράστασης $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ όταν το n τείνει στο άπειρο

n	Όριο
1	$\left(1+\frac{1}{1}\right)^1 = 2$
2	$\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = 2{,}25$
3	$\left(1+\frac{1}{3}\right)^3 = 2{,}3703$
100	$\left(1+\frac{1}{100}\right)^{100} = 2{,}7048$
1.000	$\left(1+\frac{1}{1.000}\right)^3 = 2{,}7169$
1.000.000	$\left(1+\frac{1}{1.000.000}\right)^{1.000.000} = 2{,}71828$

Παράδειγμα

Έστω κεφάλαιο € 1.000 που τοκίζεται με επιτόκιο 8%.

Για έναν χρόνο και με εκτοκισμό μία φορά τον χρόνο, το κεφάλαιο γίνεται:

1.000 × 1,08 = 1.080.

Για έναν χρόνο και με εκτοκισμό δύο φορές το χρόνο, το κεφάλαιο γίνεται:

1.000 × $1{,}04^2$ = 1.081,60.

Για έναν χρόνο και με εκτοκισμό τέσσερις φορές τον χρόνο, το κεφάλαιο γίνεται:

1.000 × $1{,}02^4$ = 1.082,43.

Αν ο εκτοκισμός είναι συνεχής, το κεφάλαιο διαμορφώνεται σε 1.000 × $e^{0,08}$ = 1.083,29.

Με έκπληξή μας διαπιστώνουμε ότι οι διαφορές είναι πολύ μικρότερες από αυτές που περιμέναμε.

Αν δοκιμάσουμε για 25 χρόνια, το κεφάλαιο με εκτοκισμό μία φορά τον χρόνο, γίνεται 1.000 × $1{,}08^{25}$ = 6.848,48.

Αν ο εκτοκισμός είναι συνεχής, τότε το αποτέλεσμα είναι 1.000 × $e^{0,08*25}$ = 7.389,06, μια διαφορά δηλαδή € 540,58, που δεν είναι ιδιαίτερα σημαντική, αν λάβουμε υπόψη τη μακρά περίοδο εκτοκισμού των 25 χρόνων.